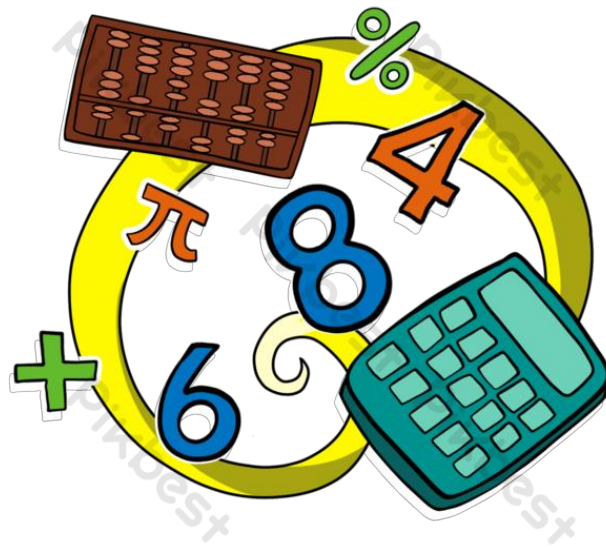


แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่องฟังก์ชันกำลังสอง



ชื่อ..... นามสกุล.....

เลขที่..... ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/.....

จัดทำโดย นางกฤตติกา กาวิน

1.1

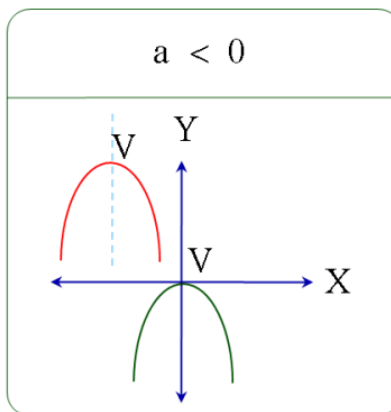
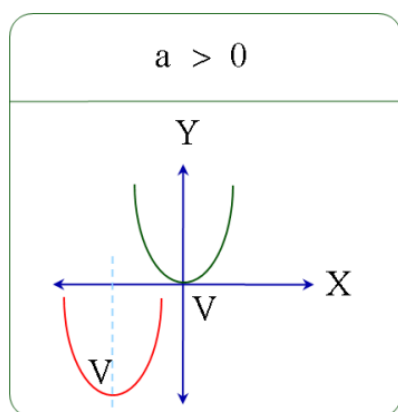
รูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง

บทนิยาม

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$ จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง เรียกว่า พาราโบลา (parabola) ถ้าเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบน จะเรียกว่า พาราโบลาหงาย ถ้าเส้นโค้งเปิดลงด้านล่าง จะเรียกว่า พาราโบลาคว่ำ

ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นพาราโบลาหงาย และ $a < 0$ กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ



ตัวอย่าง

1) $y = 2x^2 + 3x - 10$

จะได้ $a = 2$, $b = 3$ และ $c = -10$

2) $y = x^2 + 1$

จะได้ $a = 1$, $b = 0$ และ $c = 1$

3) $y = -x^2 + 2x + 1$

จะได้ $a = -1$, $b = 2$ และ $c = 1$

1

จงบอกค่า a , b และ c ของฟังก์ชันกำลังสองในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $y = 4x^2 - 5x + 7$

.....

2) $y = x^2 + 3$

.....

3) $y = 3x^2 + 7x$

.....

4) $y = -3x^2 - x + 9$

.....

2

จงบอกว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มีลักษณะกราฟเป็นพาราโบลาหงาย หรือ พาราโบลาคว่ำ

1) $y = 3x^2$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

2) $y = -4x^2 + 3x - 2$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

3) $y = -x^2 + 6$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

4) $y = 4x^2 + 7x$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

5) $y = -3x^2 - x + 9$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

6) $y = 3x^2 + 7x$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

7) $y = x^2 + 3$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

8) $y = 4x^2 - 5x + 7$

พาราโบลาหงาย / พาราโบลาคว่ำ

1.2

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$

ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟจากสมการ 1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ 3) $y = \frac{1}{4}x^2$

วิธีทำ

1) จาก $y = x^2$ จะได้

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	9	4	1

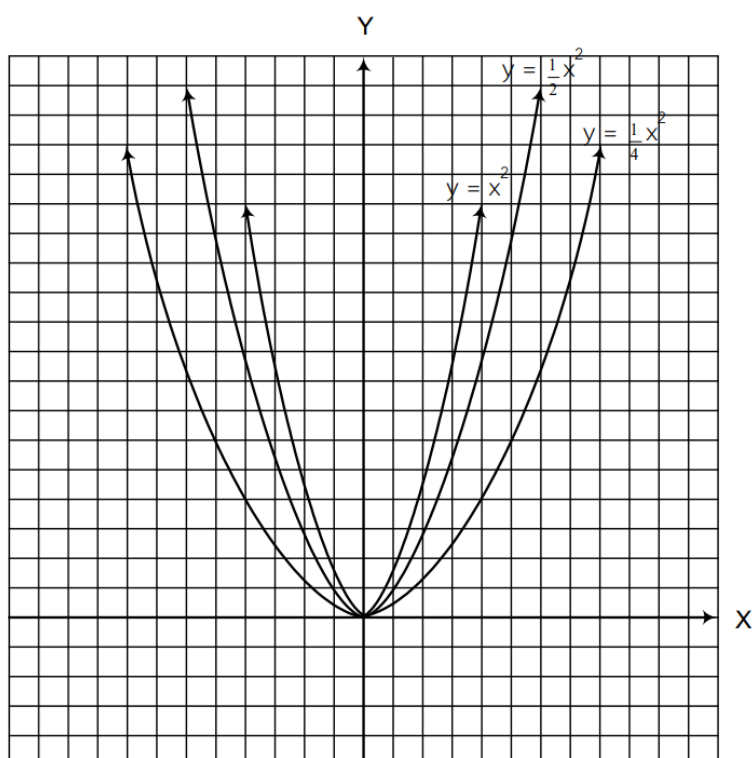
2) จาก $y = \frac{1}{2}x^2$ จะได้

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	18	8	2	0	2	8	18

3) จาก $y = \frac{1}{4}x^2$ จะได้

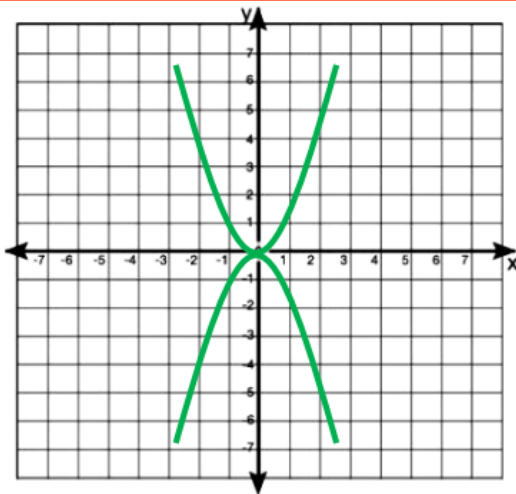
x	-8	-4	-2	0	2	4	8
y	16	4	1	0	1	4	16

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



สรุปลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$

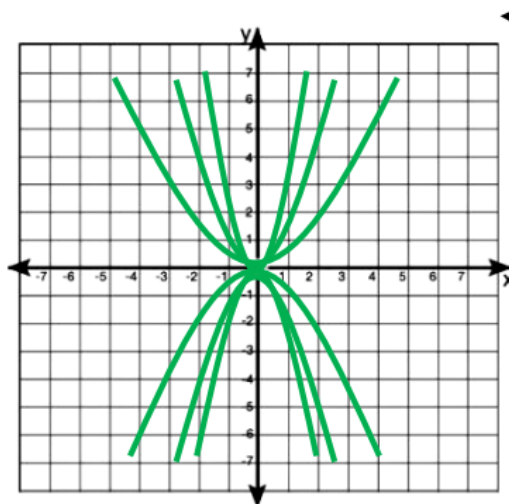
- 1) เมื่อ $a > 0$ ได้พาราโบลาหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(0, 0)$
เมื่อ $a < 0$ ได้พาราโบลาคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่ $(0, 0)$



$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ เป็นบวกกราฟที่ได้จะเป็น} \\ \text{กราฟหงายได้ } f(x) = ax^2 \\ \text{จุดต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ } (0, 0) \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ เป็นลบกราฟที่ได้จะเป็น} \\ \text{กราฟคว่ำได้ } f(x) = ax^2 \\ \text{จุดสูงสุดของกราฟอยู่ที่ } (0, 0) \end{array} \right.$

- 2) แกนสมมาตรคือ แกน Y หรือเส้นตรง $X = 0$,
สมการแกนสมมาตรคือ $X = 0$
3) เมื่อ $a > 0$ ค่าต่ำสุดคือ 0 และ เมื่อ $a < 0$ ค่าสูงสุดคือ 0
4) $|a|$ ยิ่งมากกราฟยิ่งแคบ



a เพิ่มขึ้นกราฟแคบ
เบนเข้าหาแกน Y

a ลดลงกราฟกว้าง
เบนเข้าหาแกน X



แบบฝึกทักษะที่ 1.2 ฟังก์ชันกำลังสองในรูปแบบ $y = ax^2$

คำชี้แจง

1) ให้นักเรียนเติมคำตอบหรือใส่เครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง

ข้อที่	สมการ	กราฟ		สมการ	ค่า		จุด	
		หงาย	คว่ำ		สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด
1.	$y = 5x^2$							
2.	$y = -3x^2$							
3.	$y = 12x^2$							
4.	$y = -6x^2$							

2) จงเขียนกราฟของ $y = 2x^2$ และ $y = -2x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

วิธีแก้ปัญหา

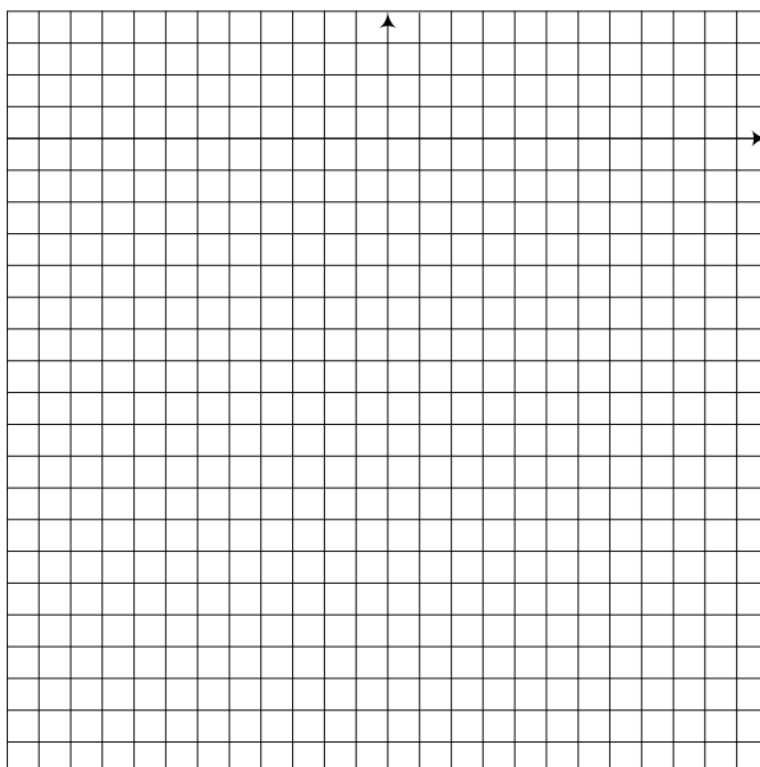
2.1) $y = 2x^2$

2.2) $y = -2x^2$

x	1	2	3	0	-1	-2
y						

x	1	2	3	0	-1	-2
y						

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



1.3

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

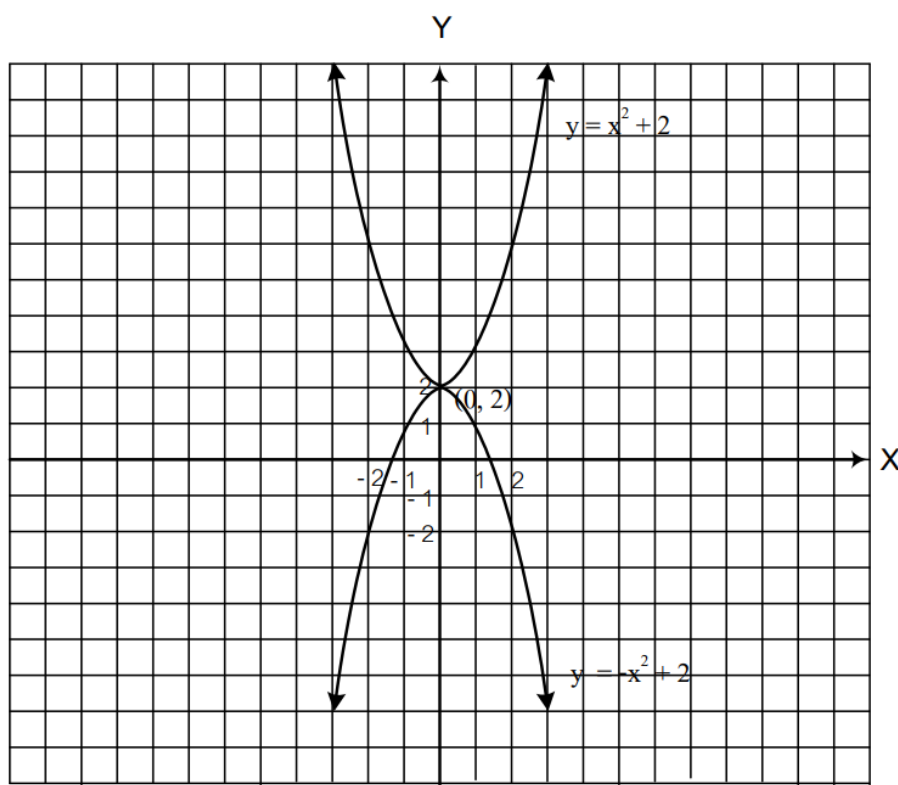
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟจากสมการ 1) $y = x^2 + 2$ 2) $y = -x^2 + 2$

วิธีทำ จาก $y = x^2 + 2$ และ $y = -x^2 + 2$ จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11
$y = -x^2 + 2$	-7	-2	1	2	1	-2	-7

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ





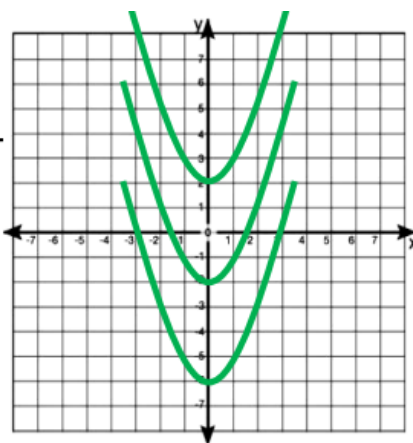
สรุปลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0, k \neq 0$

- 1) เมื่อ $a > 0$ ได้พาราโบลาหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(0, k)$ ค่าต่ำสุด $= k$
เมื่อ $a < 0$ ได้พาราโบลาคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่ $(0, k)$ ค่าสูงสุด $= k$
- 2) แกนสมมาตรคือ แกน Y หรือเส้นตรง $x = 0$
สมการแกนสมมาตรคือ $x = 0$



- 3) ถ้า $k > 0$ จุดวกกลับอยู่เหนือแกน X
ถ้า $k < 0$ จุดวกกลับอยู่ใต้แกน X
ถ้า a, k มีเครื่องหมายเหมือนกัน กราฟไม่ตัดแกน X
ถ้า a, k มีเครื่องหมายต่างกัน กราฟจะตัดแกน X

k เป็นลบกราฟเลื่อนลงด้วย
ระยะ $|k|$ หน่วย จุดต่ำสุดหรือ
สูงสุดของกราฟอยู่ที่ $(0, k)$



k เป็นบวกกราฟเลื่อนขึ้น
ด้วยระยะ $|k|$ หน่วย
จุดต่ำสุดหรือสูงสุด
ของกราฟอยู่ที่ $(0, k)$



แบบฝึกทักษะที่ 1.3 ฟังก์ชันกำลังสองในรูปแบบ $y = ax^2 + k$

คำชี้แจง

1) ให้นักเรียนเติมคำตอบหรือใส่เครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง

ข้อที่	สมการ	กราฟ		สมการ แกนสมมาตร	ค่า		จุด	
		หงาย	คว่ำ		สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด
1.	$y = -2x^2 - 5$							
2.	$y = 3x^2 + 5$							
3.	$y = -5x^2 + 6$							
4.	$y = 4x^2 - 7$							

2) จงเขียนกราฟของ $y = 2x^2 + 2$ และ $y = -2x^2 - 2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

วิธีแก้ปัญหา

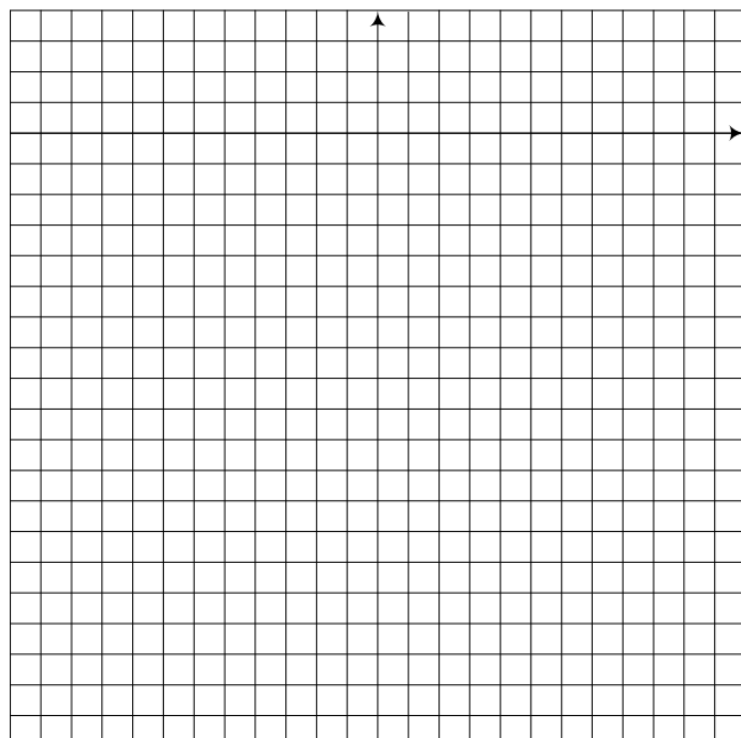
2.1) $y = 2x^2 + 2$

2.2) $y = -2x^2 - 2$

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
y							

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
y							

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



1.4

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2$ เมื่อ $a, h, k \neq 0$

ตัวอย่าง

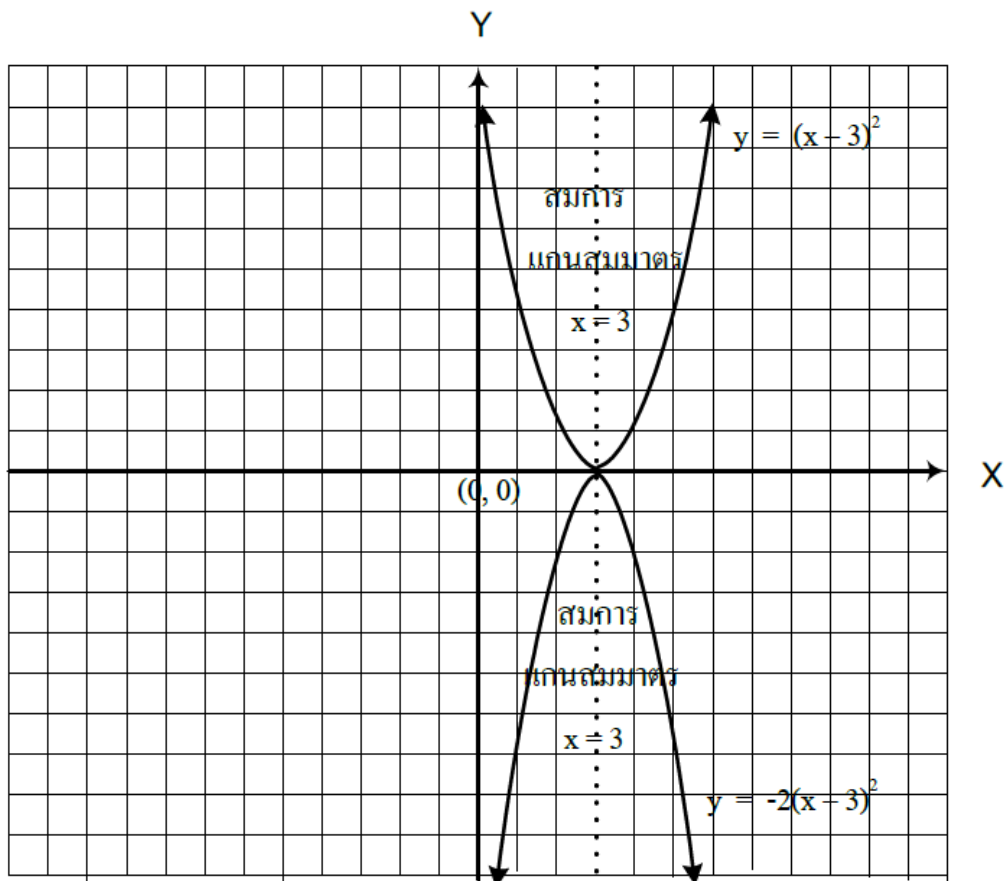
จงเขียนกราฟจากสมการ 1) $y = (x - 3)^2$ 2) $y = -2(x - 3)^2$

วิธีทำ

1) จาก $y = (x - 3)^2$ จะได้

x	0	2	3	4	5	6	7
$y = (x - 3)^2$	9	1	0	1	4	9	16
$y = -2(x - 3)^2$	-18	-2	0	-2	-8	-18	-32

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ





สรุปลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x - h)^2$ เมื่อ $a \neq 0$, $h \neq 0$

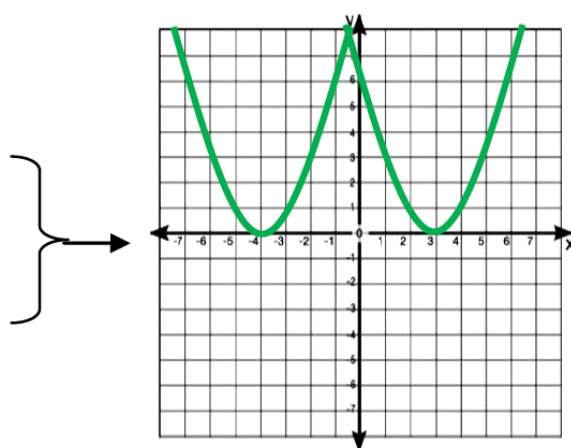
1) เมื่อ $a > 0$ ได้พาราโบลาหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(h, 0)$ ค่าต่ำสุด = 0
เมื่อ $a < 0$ ได้พาราโบลาคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่ $(h, 0)$ ค่าสูงสุด = 0

2) แกนสมมาตรคือ เส้นตรง $x = h$
สมการแกนสมมาตรคือ $x = h$



3) $h > 0$ แกนสมมาตรอยู่ทางขวาของแกน Y
 $h < 0$ แกนสมมาตรอยู่ทางซ้ายของแกน Y

h เป็นลบกราฟเลื่อนซ้าย
ด้วยระยะ $|h|$ หน่วย
จุดต่ำสุดหรือสูงสุดของ
กราฟอยู่ที่ $(h, 0)$



h เป็นบวกกราฟเลื่อน
ขวาด้วยระยะ

$|h|$ หน่วย จุดต่ำสุด
หรือสูงสุดของกราฟ
อยู่ที่ $(h, 0)$



แบบฝึกทักษะที่ 1.4 ฟังก์ชันกำลังสองในรูปแบบ $y = a(x - h)^2$

คำชี้แจง

1) ให้นักเรียนเติมคำตอบหรือใส่เครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง

ข้อที่	สมการ	กราฟ		สมการ แกนสมมาตร	ค่า		จุด	
		หงาย	คว่ำ		สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด
1.	$y = (x + 8)^2$							
2.	$y = -(x + 3)^2$							
3.	$y = 2(x - 3)^2$							
4.	$y = -3(x - 2)^2$							

2) จงเขียนกราฟของ $y = (x + 6)^2$ และ $y = -(x - 8)^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

วิธีแก้ปัญหา

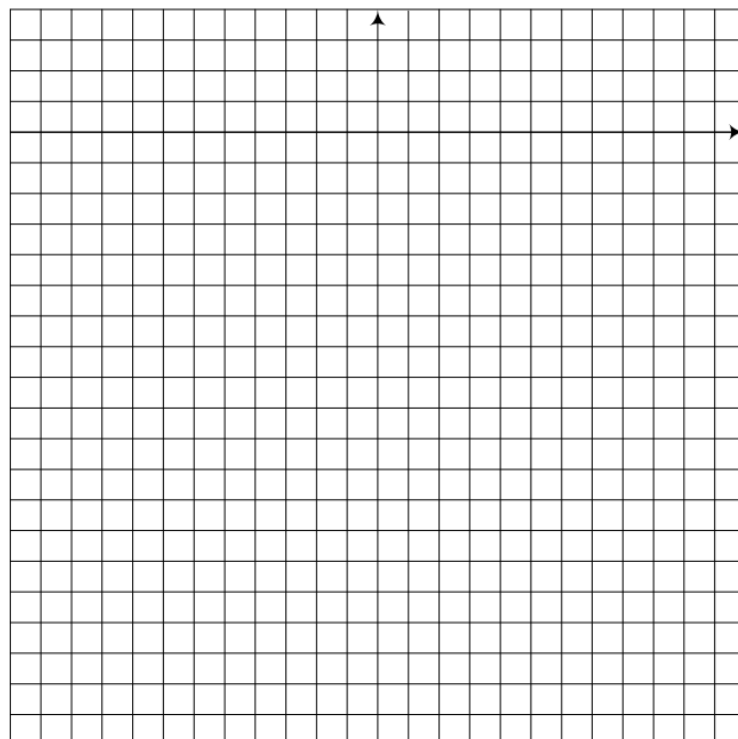
2.1) $y = (x + 6)^2$

2.2) $y = -(x - 8)^2$

x	-4	-5	-6	-7	-8	-9
y						

x	6	7	8	9	10	11
y						

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



1.5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a, h, k \neq 0$

ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟจากสมการ 1) $y = -(x + 2)^2 - 4$ 2) $y = -(x + 2)^2 + 2$

3) $y = (x - 3)^2 - 5$ 4) $y = (x - 3)^2 + 1$

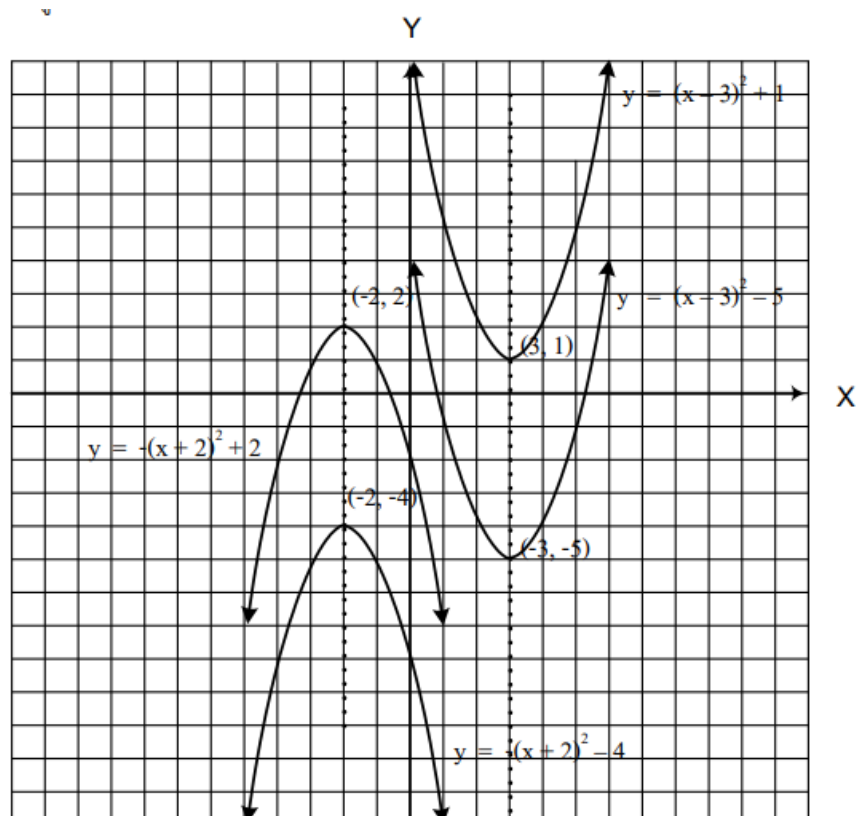
วิธีทำ จาก $y = -(x + 2)^2 - 4$ และ $y = -(x + 2)^2 + 2$ จะได้

x	-4	-3	-2	0
$y = -(x + 2)^2 - 4$	-8	-5	-4	-8
$y = -(x + 2)^2 + 2$	-2	1	2	-2

จาก $y = (x - 3)^2 - 5$ และ $y = (x - 3)^2 + 1$ จะได้

x	2	3	4	5
$y = (x - 3)^2 - 5$	-4	-5	-4	-1
$y = (x - 3)^2 + 1$	2	1	2	5

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



สรุป



ลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x - h)^2 + k$

เมื่อ $a > 0$ ได้พาราโบลาหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ (h, k) ค่าต่ำสุด = k

เมื่อ $a < 0$ ได้พาราโบลาคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่ (h, k) ค่าสูงสุด = k

ถ้า $k > 0$ จุดวกกลับอยู่เหนือแกน X

ถ้า $k < 0$ จุดวกกลับอยู่ใต้แกน X

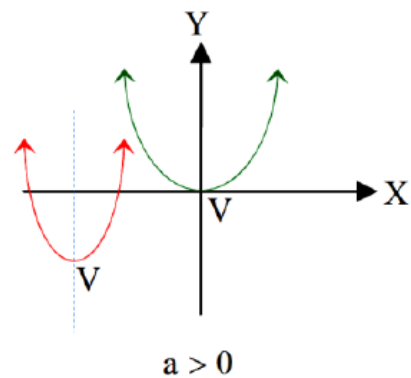
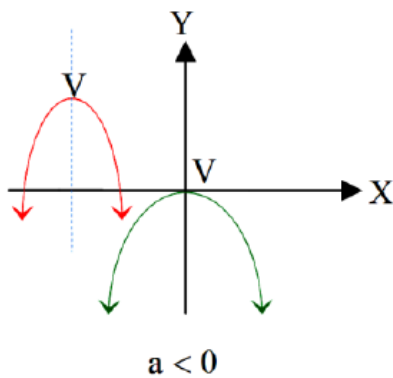
แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$ สมการแกนสมมาตรคือ $x = h$

ถ้า $h > 0$ แกนสมมาตรอยู่ทางขวามือของแกน Y

ถ้า $h < 0$ แกนสมมาตรอยู่ทางซ้ายมือของแกน Y

ถ้า a และ k มีเครื่องหมายเหมือนกันกราฟไม่ตัดแกน X

ถ้า a และ k มีเครื่องหมายต่างกันกราฟตัดแกน X



เรียกจุด V ว่า จุดวกกลับ หรือ จุดยอด

กรณีที่ กราฟหงาย ($a > 0$) จะเรียกจุด V ว่า จุดต่ำสุด

กรณีที่ กราฟคว่ำ ($a < 0$) จะเรียกจุด V ว่า จุดสูงสุด

เรียกเส้นปะว่า เส้นสมมาตร หรือ แกนสมมาตร

สมการ	จุดวกกลับ	สมการเส้นสมมาตร	ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด
$f(x) = ax^2$	$(0,0)$	$x = 0$	0
$f(x) = ax^2 + k$	$(0,k)$	$x = 0$	k
$f(x) = a(x-h)^2$	$(h,0)$	$x = h$	0
$f(x) = a(x-h)^2 + k$	(h,k)	$x = h$	k



แบบฝึกทักษะที่ 1.5 ฟังก์ชันกำลังสองในรูปแบบ $y = a(x - h)^2 + k$

คำชี้แจง

1) ให้นักเรียนเติมคำตอบหรือใส่เครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง

ข้อที่	สมการ	กราฟ		สมการ แกนสมมาตร	ค่า		จุด	
		หงาย	คว่ำ		สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด
1.	$y = -(x + 8)^2 - 6$							
2.	$y = 2(x - 4)^2 + 3$							
3.	$y = -4(x + 4)^2 - 10$							
4.	$y = 3(x + 2)^2 + 7$							

2) จงเขียนกราฟของ $y = (x - 5)^2 + 4$ และ $y = -(x + 5)^2 - 3$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

วิธีแก้ปัญหา

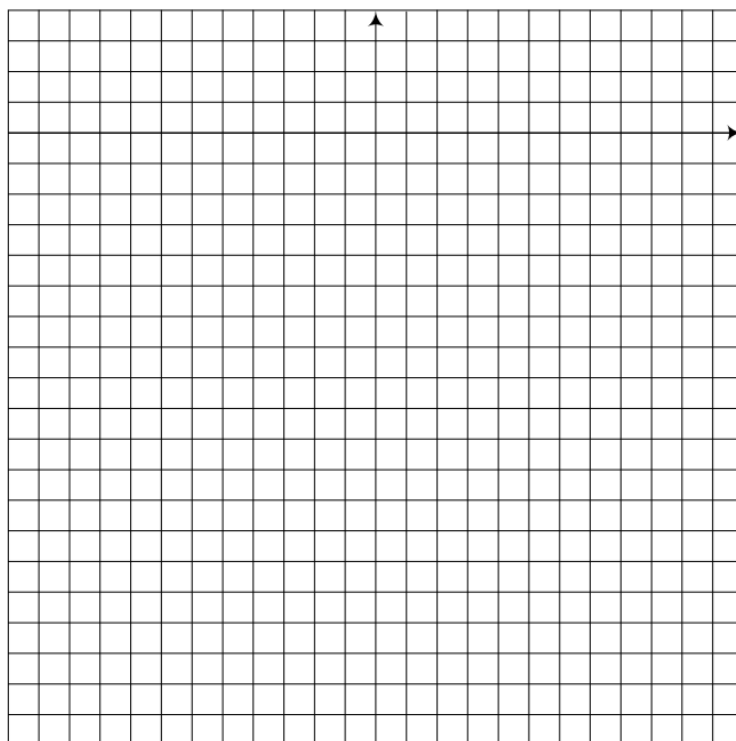
2.1) $y = (x - 5)^2 + 4$

2.2) $y = -(x + 5)^2 - 3$

x	6	5	4	3	2
y					

x	-5	-4	-3	-2
y				

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ



1.6 กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

วิธีการหาจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

จากสมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$ จะได้ $a = 3, b = -6$ และ $c = 1$

หาจุดต่ำสุดคือ $x = -\frac{b}{2a}$

แทนค่า $x = -\frac{-6}{2(3)}$
 $= 1$

แทนค่า $x = 1$ ใน สมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$ จะได้

$y = 3(1)^2 - 6(1) + 1$ (จะสะดวกกว่า)
 $= -2$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(3)(1) - (-6)^2}{4(3)} = -2$$

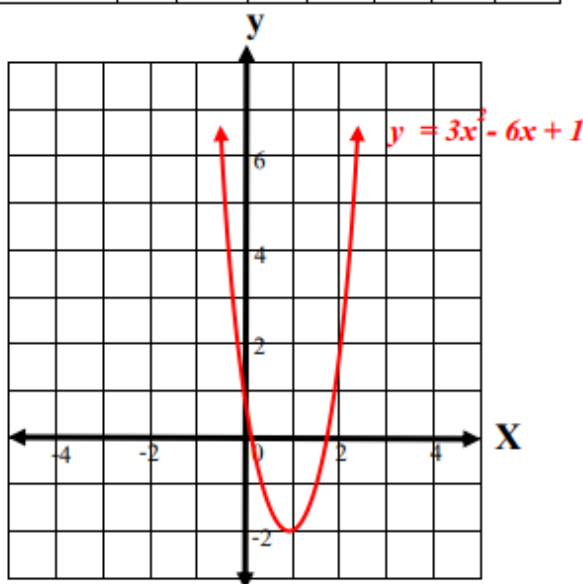
พิจารณาสมการ $y = 3x^2 - 6x + 1$ จะได้กราฟเป็นพาราโบลาหงาย (ถ้า $a = 3$)

จุดต่ำสุดคือ จุด $(1, -2)$ และ เส้นตรง $x = 1$ เป็นแกนสมมาตร

หาจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

นำข้อมูลในตารางมาเขียนกราฟ

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 3x^2 - 6x + 1$	25	10	1	-2	1	10	25



สรุปลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + bx + c$
เมื่อ $a \neq 0$

เป็นกราฟพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และ พาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$

จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟ คือ จุด $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

แกนสมมาตรคือ $x = -\frac{b}{2a}$

ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของกราฟ คือ $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$





แบบฝึกทักษะที่ 1.6 ฟังก์ชันในรูปแบบ $y = ax^2 + bx + c$

คำชี้แจง

1) ให้นักเรียนเติมคำตอบหรือใส่เครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง

$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$	ค่า a	กราฟคว่ำ/ หงาย	จุดต่ำสุด/ จุดสูงสุด	แกนสมมาตร
$y = x^2 - 4x + 3$	$y = (x - 2)^2 - 1$	1	หงาย	(2, -1)	$X = 2$
$y = -x^2 - 2x + 3$					
$y = x^2 - 4x + 4$					
$y = -4x^2 + 12x - 9$					
$y = 2x^2 + 2x + 1$					

2) เขียนกราฟจากสมการที่กำหนดให้

1) $y = x^2 - 2x - 3$

หาแกนสมมาตร $x = -\frac{b}{2a}$

$x = \dots\dots\dots$

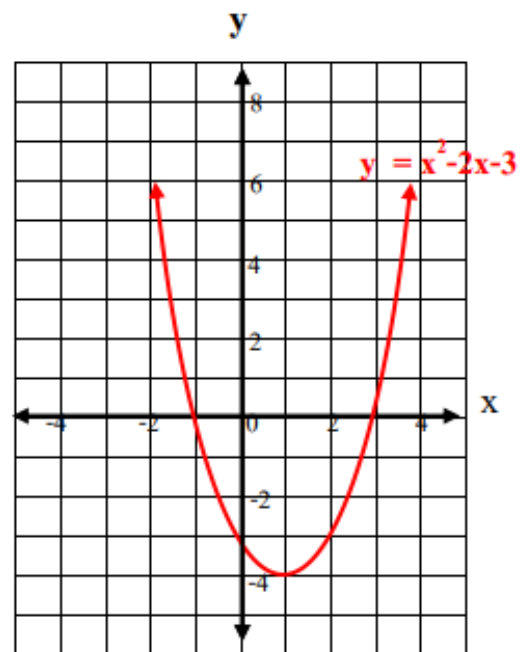
$= 1$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = (1)^2 - 2(1) - 3$

$= \dots\dots\dots$

จะได้จุดต่ำสุดคือ (.....,.....)

หาจุดต่างๆบนกราฟ



x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 2x - 3$							

2) $y = 3 + 4x - x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

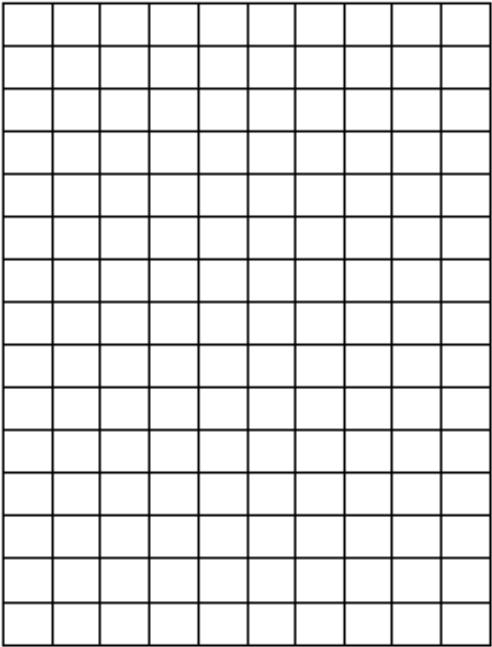
.....

.....

.....

.....

.....



x								
y =								